Aksjomaty liczb rzeczywistych

Uwaga pojęciowa. Wbrew pozorom są dobre powody do sformułowania *aksjomatów liczb rzeczywistych*. Wśród tych powodów jest również pytanie *Czym są liczby rzeczywiste?* albo w ogóle *Czym są liczby?*.
Współcześnie matematycy chętnie uciekają od bezpośrednich odpowiedzi na te pytania, zamiast tego precyzując, co z tymi liczbami można zrobić (np. dodawać, mnożyć, porównywać) i czego od tych operacji oczekujemy, żeby daną strukturę uznać za *liczby rzeczywiste*.

Aksjomaty liczb rzeczywistych.

(A1) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $x + y = y + x$

(A2) dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi $(x + y) + z = x + (y + z)$

(A3) dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ jest $x + 0 = x$

(A4) dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje element $-x \in \mathbb{R}$ spełniający $x + (-x) = 0$

(A5) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $xy = yx$

(A6) dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi $(xy)z = x(yz)$

(A7) dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ jest $1 \cdot x = x$

(A8) dla każdego $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, istnieje element $x^{-1} \in \mathbb{R}$ spełniający $x \cdot x^{-1} = 1$

(A9) dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$ zachodzi $x(y + z) = xy + xz$

(A10) $1 \neq 0$

(N1) dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi *dokładnie jedna* z trzech możliwości: $x < y$, $x = y$, $y < x$

(N2) dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$, jeśli $x < y$ i $y < z$ to $x < z$

(N3) dla wszystkich $x, y, z \in \mathbb{R}$:

- (a) jeśli $x < y$, to $x + z < y + z$
- (b) jeśli $x < y$ i $0 < z$, to $xz < yz$

(D) (aksjomat ciągłości Dedekinda) każdy niepusty i ograniczony z góry podzbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ ma kres górny

Zadanie 1. Wyprowadzić z aksjomatów następujące własności:

(a) 0 jest jedyną liczbą spełniającą (A3),
podobnie 1 jest jedyną liczbą spełniającą (A7).

(b) Liczby $-x$ i x^{-1} są jednoznacznie wyznaczone przez własności z aksjomatów (odpowiednio) (A4) i (A8).

(c) $0 \cdot x = 0$ dla $x \in \mathbb{R}$.

(d) Jeśli $xy = 0$, to $x = 0$ lub $y = 0$.

(e) $(-1) \cdot x = -x$ dla $x \in \mathbb{R}$.

(f) $1 > 0$ (*wskazówka:* sprawdzić, że $(-1)^2 = 1$, oraz że $x^2 \geqslant 0$ dla $x \in \mathbb{R}$).

Zadanie 2. Wykazać, że nie istnieje najmniejsza liczba dodatnia.

Zadanie 3. Sprawdzić, które z aksjomatów spełnia

(a) zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ ze zwykłymi działaniami;

(b) zbiór $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ ze zwykłymi działaniami;

(c) zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$ ze zwykłymi działaniami;

(d) zbiór $\{\$, \&, ¶\}$ z działaniami

+	\$	&	¶
\$	&	¶	\$
&	¶	\$	&
¶	\$	&	¶

·	\$	&	¶
\$	\$	&	¶
&	&	\$	¶
¶	¶	¶	¶

elementem ¶ jako zerem i elementem \$ jako jedynką.

(e) zbiór $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ z działaniami dodawania i mnożenia modulo p (gdzie p jest liczbą pierwszą);

(f) zbiór $\mathbb{Z}_6$ z działaniami modulo 6;

(g) zbiór $\mathbb{R}$ z działaniami dodawania $x \oplus y = x + y + 1$, mnożenia $x \odot y = xy + x + y$, -1 w miejsce zera i 0 w miejsce jedynki.

Zadanie 4.

(a) Sprawdzić, które z aksjomatów (N1), (N2), (N3) spełnia zadana na $\mathbb{C}$ relacja porządku

$$z_1 < z_2 \quad \iff \quad |z_1| < |z_2|.$$

(b) Sprawdzić to samo dla porządku leksykograficznego

$$a_1 + ib_1 < a_2 + ib_2 \quad \iff \quad (a_1 < a_2 \text{ lub } a_1 = a_2 \text{ i } b_1 < b_2)\,.$$

(c) ★ Wykazać, że na $\mathbb{C}$ nie da się zadać relacji spełniającej wszystkie trzy aksjomaty porządku.

Liczby naturalne

Definicja liczb naturalnych. Jeśli liczby rzeczywiste uznamy za dane, to zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ możemy zdefiniować jako część wspólną wszystkich zbiorów $A \subseteq \mathbb{R}$ o następujących własnościach:

$$0 \in A, \quad \text{ponadto jeśli } n \in A, \text{ to również } n+1 \in A.$$

Zadanie 1. Jeśli a jest liczbą naturalną i $a > 0$, to $a-1$ również jest liczbą naturalną.

Zadanie 2. Jeśli liczby a, b są naturalne i $a < b$, to $a + 1 \leqslant b$.

Zadanie 3. (zasada Archimedesa) Wykazać, że zbiór liczb naturalnych nie posiada górnego ograniczenia.

Zadanie 4. (zasada indukcji) Jeśli zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ ma następujące własności

$$0 \in A, \quad \text{ponadto jeśli } n \in A, \text{ to również } n+1 \in A,$$

to $A = \mathbb{N}$.

Uwaga. Zazwyczaj o zasadzie indukcji myśli się następująco: jeśli zdanie T_0 jest prawdziwe, a ze zdania T_n daje się wywnioskować T_{n+1}, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe jest zdanie T_n.

Zadanie 5. (zasada silnej indukcji) Jeśli zbiór $B \subseteq \mathbb{N}$ zawiera 0 oraz ma własność

$$\text{jeśli } \{k \in \mathbb{N} : k < n\} \in B, \text{ to } n \in B,$$

to $B = \mathbb{N}$.

Wskazówka. Rozważyć zbiór $A = \{n \in \mathbb{N} : 0, 1, \ldots, n \in B\}$.

Zadanie 6. (zasada minimum) Każdy niepusty podzbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ ma element najmniejszy.

Zadanie 7. Wykazać, że jeśli liczby a i b są naturalne, to ich suma $a+b$ oraz iloczyn ab również są liczbami naturalnymi.

Liczby pierwsze i algorytm Euklidesa (temat uzupełniający)

Umowa. W tej serii przyjmiemy dla wygody, że $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ (bez zera).

Definicje. Rozważmy dwie liczby naturalne $a, b \in \mathbb{N}$. Powiemy, że a dzieli b, jeśli istnieje taka liczba $c \in \mathbb{N}$, by $ac = b$.

Liczbę naturalną $p \in \mathbb{N}$ nazwiemy pierwszą, jeśli posiada dokładnie dwa dzielniki naturalne: 1 oraz p (według tej konwencji 1 nie jest liczbą pierwszą).

Algorytm Euklidesa. Mając dane dwie liczby naturalne $a_1 \geqslant a_2 > 0$, zdefiniujmy rekurencyjnie:

$$a_{n+2} := a_n \bmod a_{n+1} \quad \text{(reszta z dzielenia } a_n \text{ przez } a_{n+1}) \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots.$$

Ciąg a_n jest ściśle malejący i dlatego $a_m = 0$ dla pewnego $m \geqslant 3$ zależnego od a_1, a_2 (w związku z tym rezygnujemy z definiowania a_n dla $n > m$). Wartością a_{m-1} jest wtedy największy wspólny dzielnik liczb a_1 i a_2.

Zadanie 1. Wykazać, że kolejne liczby a_n są (całkowitoliczbowymi) kombinacjami liniowymi a_1, a_2, to znaczy dla każdego $n \geqslant 1$ istnieją współczynniki $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Z}$ spełniające

$$a_n = \alpha_n a_1 + \beta_n a_1.$$

Zadanie 2. Dowieść, że jeśli liczby a, b są względnie pierwsze (tzn. ich jedynym wspólnym dzielnikiem naturalnym jest 1), to istnieją współczynniki $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ spełniające

$$\alpha a + \beta b = 1.$$

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli p jest liczbą pierwszą, a a, b liczbami naturalnymi, to

$$p|ab \quad \Longrightarrow \quad p|a \text{ lub } p|b.$$

Wskazówka. Jeśli $p \nmid a$, to dla a, p można zastosować poprzednie zadanie, a otrzymaną równość domnożyć przez b.

Zadanie 4. Jeśli p jest liczbą pierwszą i $p \nmid a$, to istnieje liczba $\alpha \in \mathbb{N}$ spełniająca $p|\alpha a - 1$, czyli odwrotność a modulo p.

Wskazówka. Warto skorzystać albo z zadania 2 (dla liczb a i p) albo z zadania 3 (rozważając reszty z dzielenia $a, 2a, \ldots, pa$ przez p).

Ułamki łańcuchowe (temat poboczny). Mając daną liczbę $a > 0$, stwórzmy jej rozwinięcie w ułamek łańcuchowy. W tym celu zdefiniujmy skończony ciąg rekurencyjny

$$r_0 := a, \qquad r_{n+1} := \frac{1}{r_n - [r_n]}, \text{ o ile } r_n \notin \mathbb{Z},$$

następnie $a_n := [r_n]$. Jak łatwo się przekonać, spełnione są równości

$$a = a_0 + \frac{1}{r_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{r_2}} = \ldots.$$

Np. $\frac{333}{106} = 3 + \frac{1}{7+\frac{1}{15}}$, co zapisuje się jako $\frac{333}{106} = [3; 7, 15]$; rozwinięcie dla e można znaleźć tutaj.

Zadanie 5. ★ Sprawdzić, że jeśli a jest liczbą wymierną, to jej rozwinięcie w ułamek łańcuchowy jest skończone (tzn. $r_n \in \mathbb{Z}$ dla pewnego n). Wywnioskować, że liczba $\sqrt{2}$ nie jest wymierna.

Indukcja

Zadanie 1. Niech a_n będzie minimalną liczbą ruchów do rozwiązania łamigłówki *wieża z Hanoi* o n krążkach. Sprawdzić, że $a_{n+1} = 2a_n + 1$, a następnie wykazać równość $a_n = 2^n - 1$.

Zadanie 2. ☗ Wskazać błąd w następującym rozumowaniu. Niech zdanie T_n brzmi: w dowolnej grupie n osób wszyscy mają ten sam kolor włosów. Oczywiście T_1 jest prawdziwe. Zakładając prawdziwość T_n, rozważmy dowolną grupę $n+1$ osób. Po wyjęciu z niej dowolnej osoby pozostaje grupa n osób o tym samym kolorze włosów; wynika stąd, że wszystkie $n+1$ mają ten sam kolor. Z zasady indukcji wnioskujemy, że wszystkie osoby na świecie mają ten sam kolor włosów.

Zadanie 3. Wyprowadzić wzory na sumy

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad 1 + q + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ dla } q \neq 1,$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \quad 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

Zadanie 4. Pokazać, że

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{7}{12} \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots.$$

Wskazówka. Rozważyć dowód indukcyjny mocniejszej nierówności $\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{7}{12}$.

Zadanie 5. ★ Oznaczmy $n^{\underline{k}} := n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$. Wyprowadzić tożsamość

$$1^{\underline{k}} + 2^{\underline{k}} + \ldots + n^{\underline{k}} = \frac{(n+1)^{\underline{k+1}}}{k+1}.$$

Wskazówka. Rozważyć indukcję lub argument kombinatoryczny (np. w trójkącie Pascala).

Zadanie 6. Pokazać, że każda liczba naturalna daje się rozłożyć na iloczyn liczb pierwszych.

Zadanie 7. (uogólnienie nierówności Bernoulliego) Dane są liczby $a_1, \ldots, a_n > -1$ takie, że $a_i a_j > 0$ dla $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Dowieść, że

$$(1 + a_1) \ldots (1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + \ldots + a_n.$$

Zadanie 8. (nierówność między średnią geometryczną a arytmetyczną) Jeśli $a_1, \ldots, a_n > 0$ i $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, to $a_1 + \ldots + a_n \geqslant n$.

Wskazówka. Jeśli odpowiednie zdanie oznaczymy przez T_n, to najłatwiej jest wykazać implikacje $T_n \Rightarrow T_{2n}$ i $T_n \Rightarrow T_{n-1}$.

Zadanie 9. Wykazać nierówność $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ dla $n \geqslant 1$.

Zadanie 10. Wykazać nierówność

$$2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! \geqslant ((n+1)!)^n \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots.$$

Zadanie 11. Niech $\pi(n)$ będzie ilością liczb pierwszych w $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Wykazać, że $\pi(n) \leqslant n/2$ dla $n \geqslant 8$.

Zadanie 12. Wykazać, że $\pi(n) < n/3$ dla $n \geqslant n_0$ (wskazać dowolną *bazową* wartość n_0).

Zadanie 13. ★ Wykazać, że istnieje taka liczba $C > 0$, że

$$\pi(n) \leqslant \frac{Cn}{\ln n} \quad \text{dla } n \geqslant 2.$$

Uwaga. Twierdzenie o liczbach pierwszych mówi, że $\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}$.

Zadanie 14. Wykazać podwójne oszacowanie

$$\frac{1}{\sqrt{4n}} 4^n \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 4^n \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Zadanie 15. ★ Udowodnić nierowność

$$\sqrt{n} \binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n - \frac{1}{2}} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Kresy zbiorów

Zadanie 1. Ustalić kresy górne i dolne zbiorów

(a) $A = \{\frac{mn}{m+n+1} : m, n \in \mathbb{N}\}$;

(b) $B = \{\frac{mn}{m^2+n^2+1} : m, n \in \mathbb{N}\}$;

(c) $C = \{\frac{mn}{m^2+n+1} : m, n \in \mathbb{N}\}$;

(d) $D = \{\frac{m^2-n}{m^2+n^2-1} : m, n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 2. Znaleźć kresy zbioru $E = \{\frac{m^2+n^2}{2^m+3^n} : m, n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 3. Wyznaczyć kres górny zbioru F:

$$F = \left\{\frac{x^2 y}{x^4 + 2y^2 + 3} : x, y \in \mathbb{R},\ x, y \geqslant 0\right\}.$$

Zadanie 4. Wyznaczyć kres górny zbioru G:

$$G = \left\{\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} : a, b, c - \text{długości boków trójkąta}\right\}.$$

Zadanie 5. Znaleźć kresy następujących zbiorów:

$$I = \left\{2(-1)^{n+1} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(2 + \tfrac{3}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$J = \left\{\frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3} : n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$K = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N},\ m < 2n\right\}$$
$$L = \left\{\sqrt{n} - [\sqrt{n}] : n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$M = \left\{x + x^{-1} : x > 0\right\}$$

Zadanie 6. Niech $A, B \subseteq (0, \infty)$ będą dwoma niepustymi zbiorami ograniczonymi z góry. Oznaczmy

$$A \cdot B := \{ab : a \in A,\ b \in B\}.$$

Sprawdzić, że $\sup A \cdot B = \sup A \cdot \sup B$.

Zadanie 7. Wykazać, że zbiór $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ nie ma kresu górnego w $\mathbb{Q}$, w szczególności $\mathbb{Q}$ nie spełnia aksjomatu ciągłości Dedekinda.

Zadanie 8. Znaleźć kresy zbioru

$$\left\{\frac{|k-n|}{k^2+n} : k, n \in \{1, 2, \ldots\},\ k \neq n\right\}.$$

Zadanie 9. Dla każdego $\varepsilon > 0$ wskazać liczbę naturalną $k \in \mathbb{N}$ taką, że

$$-\varepsilon \leqslant \frac{n+1}{n^2+2n} \leqslant \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k.$$

Praca domowa – kresy i indukcja

Termin: piątek 6 listopada, godz. 12.15

Zadanie 1. Udowodnić nierówność podwójną (dla $n = 1, 2, \ldots$):

$$2(\sqrt{n+1} - 1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2\sqrt{n} - 1.$$

Zadanie 2. Wykazać nierówność

$$\binom{3n}{n} < 7^n \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots.$$

Zadanie 3. Obliczyć wartości $\alpha = \inf H$, $\beta = \sup H$, gdy

$$H = \left\{ \frac{k + m^2}{k + 2^m} : k, m \in \{1, 2, \ldots\} \right\}$$

oraz ustalić, czy $\alpha \in H$, $\beta \in H$.

Zadanie 4. Znaleźć kresy zbioru

$$\left\{ \frac{k}{nk + 1} : k, n \in \{1, 2, \ldots\} \right\}.$$

Wprowadzenie do granic ciągów

Definicje. Ciąg $a_n \in \mathbb{R}$ to nic innego jak funkcja $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tylko inaczej zapisywana. Ciąg a_n jest zbieżny do g, jeśli $\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geqslant n_0}|a_n - g| \leqslant \varepsilon$.
Jest też wersja dla $g = +\infty, -\infty$.

Twierdzenie. Branie granicy ciągów jest zgodne z ich dodawaniem, mnożeniem i dzieleniem.

Twierdzenie o trzech ciągach. Jeśli $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz ciągi a_n i c_n są zbieżne do tej samej granicy, to b_n również.

Zadanie 1. Sprawdzić zbieżność

$$\frac{an+b}{cn+d} \to \frac{a}{c} \text{ dla } c \neq 0,$$
$$a^n \to \infty \text{ dla } a > 1, \quad a^n \to 0 \text{ dla } 0 < a < 1,$$
$$\sqrt[n]{a} \to 1 \text{ dla } a > 0, \quad \sqrt[n]{n} \to 1,$$
$$\frac{n}{a^n} \to 0 \text{ dla } a > 1, \quad \frac{n^p}{a^n} \to 0 \text{ dla } a > 1, p > 0.$$

Zadanie 2. Obliczyć granicę ciągu $a_n = \sqrt{n^2 + 5n} - n$.

Zadanie 3. Jeśli ciąg $x_n \to x$, to $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x}$.

Zadanie 4. Dane są liczby dodatnie a, b, c spełniające $a \geqslant b \geqslant c$. Wykazać, że $\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \to a$.

Techniki dowodzenia zbieżności

Zadanie 1. (lemat Sierpińskiego) Wykazać, że każdy ciąg rzeczywisty posiada podciąg monotoniczny (niemalejący lub nierosnący). Wywnioskować twierdzenie Bolzano-Weierstrassa: każdy ciąg ograniczony posiada podciąg zbieżny.

Wskazówka. Rozważyć zbiory $A_n = \{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ i dwa przypadki: albo każdy z tych zbiorów posiada element największy, albo nie.

Zadanie 2. Wyznaczyć granice ciągów określonych rekurencyjnie

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$$
$$b_1 = 2, \quad b_{n+1} = 2 + \frac{1}{b_n}.$$

Uwaga. To daje rozwinięcie dwóch znanych liczb w ułamki łańcuchowe.

Rozwiązanie. Ciąg (a_n), sposób I. Oznaczmy funkcję $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Skoro $a_1 > 0$, a funkcja f spełnia $f(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$, to indukcyjnie otrzymujemy $a_n > 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Odnotujmy również, że funkcja f jest malejąca na $(0, \infty)$, stąd dla dowolnych $k, l \in \mathbb{N}$ implikacja

$$a_k < a_l \quad \Longrightarrow \quad a_{k+1} = f(a_k) > f(a_l) = a_{l+1}. \tag{$\star$}$$

Korzystając z wynikania $(\star)$ dwukrotnie (najpierw dla $(k, l) = (n + 2, n)$, potem dla $(k, l) = (n + 1, n + 3)$), otrzymujemy

$$a_{n+2} < a_n \quad \Longrightarrow \quad a_{n+4} < a_{n+2}.$$

Skoro $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 2/3$, to mamy $a_3 < a_1$. Wykorzystując powyższą implikację, możemy więc dowieść indukcyjnie, że $a_1 > a_3 > a_5 > \ldots$. Analogicznie otrzymujemy nierówności $a_2 < a_4 < a_6 < \ldots$.

Oba te ciągi są monotoniczne, uzasadnimy teraz ich ograniczoność. Zaczynając od $a_1 > a_2$ i wielokrotnie aplikując wynikanie $(\star)$, indukcyjnie otrzymujemy $a_{2n-1} > a_{2n} < a_{2n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Oznacza to w szczególności, że

$$a_{2n+1} > a_{2n} > a_{2n-2} > \ldots > a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_{2n} < a_{2n-1} < a_{2n-3} < \ldots < a_1 = 1,$$

a więc ciąg (a_{2n+1}) jest malejący i ograniczony z dołu przez $\frac{1}{2}$, a (a_{2n}) rosnący i ograniczony z góry przez 1. Wynika stąd, że każdy z nich jest zbieżny.

Skupmy się na ciągu a_{2n+1} i oznaczmy jego granicę $g := \lim a_{2n+1}$. Ciąg ten spełnia równanie rekurencyjne $a_{2(n+1)+1} = f(f(a_{2n+1}))$, więc jego granica spełnia $g = f(f(g))$. Rozwiązując to równanie, otrzymujemy $g_\pm = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Oczywiście ciąg a_{2n+1} jako dodatni nie może zbiegać do ujemnej granicy, więc $a_{2n+1} \to \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
To samo rozumowanie stosuje się do ciągu a_{2n}. Skoro $a_{2n+1} \to \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ oraz $a_{2n} \to \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, to z twierdzenia o scalaniu cały ciąg a_n również zbiega do tej granicy.

Ciąg (b_n), sposób II. Skupmy się na ciągu pomocniczym $c_n := b_{2n-1}$. Spełnia on $c_1 = b_1 = 2$ oraz rekurencję

$$c_{n+1} = b_{2n+1} = 2 + \frac{1}{b_{2n}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{b_{2n-1}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{c_n}} = \frac{5c_n + 2}{2c_n + 1}.$$

Oznaczmy pomocniczo funkcję $h(x) = \frac{5x+2}{2x+1}$. Zauważmy najpierw, że $h(x) > 0$ dla $x > 0$, więc (indukcyjnie) $c_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Odnotujmy też, że jeśli ciąg c_n jest zbieżny do pewnego g, to granica ta spełnia równość $g = h(g)$, która zachodzi dokładnie dla $g_\pm = 1 \pm \sqrt{2}$. Skoro $c_n > 0$, to wnioskujemy, że $g = 1 + \sqrt{2}$.
Znając kandydata na granicę, łatwiej uzupełnić rozumowanie. Zauważmy, że funkcja h jest rosnąca na $(0, \infty)$, więc z $c_n < g$ wynika $c_{n+1} = h(c_n) < h(g) = g$. To (w połączeniu z $c_1 < g$) pokazuje indukcyjnie, że $c_n < g$ dla $n \in \mathbb{N}$. Podobnie, z $c_{n+1} > c_n$ wynika $c_{n+2} = h(c_{n+1}) > h(c_n) = c_{n+1}$. To z kolei (w połączeniu z $c_2 > c_1$, co należy osobno sprawdzić) pozwala wnioskować, że ciąg c_n jest rosnący.
Jako ciąg rosnący i ograniczony z góry (przez g), ciąg c_n jest zbieżny. Zgodnie z wcześniejszym rozumowaniem, jego granicą jest g. Teraz skoro $b_{2n-1} \to g$, to również

$$b_{2n} = h(b_{2n-1}) \to h(g) = g.$$

Oznacza to, że oba podciągi (indeksów nieparzystych i parzystych) mają tę samą granicę g. Z twierdzenia o scalaniu, $b_n \to g$.

Ciąg (b_n), sposób III. Najpierw sprawdzamy indukcyjnie, że $b_n > 1$. Stąd wynika też, że $b_{n+1} = 2 + \frac{1}{b_n} < 3$. Oznaczmy teraz granicę dolną $l := \liminf b_n$ oraz górną $u := \limsup b_n$; z dotychczasowych ograniczeń wiemy, że $1 \leqslant l \leqslant u \leqslant 3$.
Przykładając granicę dolną do rekurencji na b_n, otrzymujemy:

$$l = \liminf b_{n+1} = \liminf \left(2 + \frac{1}{b_n}\right) = 2 + \frac{1}{\liminf b_n} = 2 + \frac{1}{u}.$$

Analogicznie wyprowadzamy równość $u = 2 + \frac{1}{l}$. Łącząc te dwie równości w jedną, dowiadujemy się, że zarówno l jak i u rozwiązują równanie

$$x = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}.$$

Rozwiązaniami są $x_\pm = 1 \pm \sqrt{2}$. Wiemy jednak, że $l, u \geqslant 1$, a więc $l = u = 1 + \sqrt{2}$. Skoro dolna i górna granica się pokrywają, to granica ciągu b_n również istnieje i jest równa $1 + \sqrt{2}$. $\square$

Zadanie 3. Zbadać zbieżność ciągu zadanego rekurencyjnie przez $b_1 = 2020$, $b_{n+1} = \sqrt{b_n^2 + 1}$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

Zadanie 4. Wyznaczyć granice ciągów o podanych wyrazach:

$$a_n = \frac{3n^4 + 2^n}{2n^3 + 3^n}; \qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}};$$
$$c_n = \sqrt[5]{3n^5 + 2n^4} - \sqrt[5]{n^5 - n^4}; \qquad d_n = \sqrt[5]{n^5 + 2n^4} - \sqrt[5]{n^5 - n^4}.$$

Zadanie 5. Wyznaczyć wszystkie liczby będące granicami podciągów ciągu

$$a_n = \left(1 + \left(2\cos\frac{n\pi}{3}\right)^{n+1}\right)^{1/n}.$$

Uwaga. Wolno korzystać ze *szkolnej wiedzy* o wartościach $\cos\frac{n\pi}{3}$.

Zadanie 6. Niech $a_n \in \mathbb{R}$ będzie ciągiem ograniczonym. Rozważmy zbiór

$$A = \left\{ \lim_{k\to\infty} a_{n_k} : a_{n_k} \text{ posiada granicę} \right\} \subseteq \overline{\mathbb{R}},$$

czyli zbiór granic podciągów ciągu a_n ($+\infty$ i $-\infty$ też się liczą).

(a) Wykazać, że zbiór A jest domknięty, to znaczy: jeśli $b_k \in A$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz $b_k \to b$, to również $b \in A$.

(b) Wywnioskować, że zbiór A posiada element największy.
Uwaga. Ten element nazywamy górną granicą ciągu a_n i oznaczamy $\limsup a_n$.

(c) Zdefiniujmy analogicznie dolną granicę $\liminf a_n$. Sprawdzić, że ciąg a_n posiada granicę wtedy i tylko wtedy, gdy $\liminf a_n = \limsup a_n$.

(d) Sprawdzić równości

$$\limsup a_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geqslant k} a_n, \qquad \liminf a_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geqslant k} a_n.$$

Zadanie 7. ★ Niech x_1, x_2 będą dowolnymi liczbami dodatnimi. Określamy ciąg x_n wzorem $x_{n+2} = \frac{2}{x_n + x_{n+1}}$. Udowodnić, że ciąg ten jest zbieżny.

Zadanie 8. ★ Ciągi (a_n), (b_n) są określone rekurencyjnie:

$$a_0 = 1,\ b_0 = 1; \quad a_{n+1} = \frac{1}{b_n} - \sqrt{2}; \quad b_{n+1} = b_n + a_{n+1}.$$

Wykazać zbieżność i obliczyć granice obu tych ciągów.

Techniki dowodzenia zbieżności – podsumowanie

Arytmetyczne własności granicy. Branie granicy ciągów jest zgodne z ich dodawaniem, mnożeniem i dzieleniem. Ale również z wartością bezwzględną i maksimum/minimum dwóch ciągów.

Uwaga. To pozwala ze zbieżności pewnych najprostszych ciągów (np. $1/n$, 2^n, $n/2^n$) wnioskować o zbieżności wielu innych.

Twierdzenie o trzech ciągach. Jeśli $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ oraz ciągi a_n i c_n są zbieżne do tej samej granicy, to b_n również.

Uwaga. W niektórych przypadkach zadany ciąg b_n ma skomplikowaną postać, ale jesteśmy w stanie ograniczyć go z góry i z dołu przez bardziej przyjazne ciągi a_n, c_n. Jeśli tylko mają one tę samą granicę, otrzymujemy zbieżność b_n.

Monotoniczność. Każdy ciąg monotoniczny posiada granicę (skończoną lub nie).

Uwaga. Czasami nietrudno jest wykazać monotoniczność, skąd już wynika zbieżność, chociaż nie znamy granicy. W przypadku ciągów rekurencyjnych jednak łatwo wyznaczyć jej wartość.

Warunek Cauchy'ego. Ciąg a_n jest zbieżny (do granicy skończonej) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego: dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|a_k - a_n| < \varepsilon$ dla wszystkich $k, n \geqslant n_0$.

Uwaga. Podobnie jak z monotonicznością, warunek ten pozwala sprawdzić zbieżność (nawet jest jej równoważny), ale nie daje informacji o granicy.

Twierdzenie o scalaniu. Jeśli nieskończone podzbiory $I_1, \ldots, I_m \subseteq \mathbb{N}$ sumują się do $\mathbb{N}$ oraz każdy z m ciągów wyznaczonych przez indeksy ze zbiorów odpowiednio $I_1, \ldots, I_m$ zbiega do tej samej granicy g, to cały ciąg a_n też zbiega do g.
Najprostsze zastosowanie: jeśli $a_{2n} \to g$ i $a_{2n+1} \to g$, to również $a_n \to g$.

Uwaga. To przydaje się, jeśli odpowiednie podciągi łatwiej poddają się analizie niż cały ciąg (np. można je wyrazić bardziej zwartym zbiorem albo są monotoniczne).

Rekurencje. Jeśli ciąg a_n spełnia rekurencję $a_{n+1} = f(a_n)$ (gdzie f jest funkcją ciągłą) i jest zbieżny do g, to g spełnia równość $g = f(g)$. Przez ciągłość rozumiemy tu, że zbieżność $a_n \to g$ pociąga za sobą $f(a_n) \to f(g)$.

Uwaga. Pozwala to wyznaczyć granicę, a przynajmniej kandydata na granicę. Trzeba jednak osobno wykazać zbieżność.

Zastosowanie granic górnych i dolnych. Jeśli $\limsup a_n \leqslant g$ oraz $\liminf a_n \geqslant g$, to $a_n \to g$.

Uwaga. Treść zawarta w tym stwierdzeniu jest bardzo prosta, ale język granic górnych i dolnych pozwala w zwarty sposób sformułować pewne wnioski pośrednie w rozumowaniu. Główną zaletą tych pojęć jest to, że liczby $\limsup a_n$ i $\liminf a_n$ są zawsze dobrze zdefiniowane, w odróżnieniu od $\lim a_n$.

Zastosowanie pojęcia równości asymptotycznej. O dwóch niezerowych ciągach $a_n, b_n \neq 0$ mówimy, że są *asymptotycznie równe* (i piszemy $a_n \sim b_n$), jeśli $a_n/b_n \to 1$. Relacja ta:

- jest zwrotna, symetryczna i przechodnia;
- jest zgodna z mnożeniem, tzn. $a_n \sim b_n$ implikuje $c_n a_n \sim c_n b_n$;
- jeśli $a_n \sim b_n$ i $b_n \to g$ (dopuszczamy również $g = 0$ i $g = \infty$), to $a_n \to g$.

Uwaga. Te stwierdzenia są same w sobie oczywiste, ale mogą uprościć zapis. Jeśli badamy zbieżność ciągu $c_n a_n$, przy czym $a_n \sim b_n$, a b_n ma dużo prostszą formę niż a_n, to wystarczy badać $c_n b_n$.

Lemat Stolza. Jeśli $b_n \to \infty$ i b_n jest rosnący od pewnego miejsca, to

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to g \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} \to g.$$

Ta sama konkluzja zachodzi, gdy $a_n, b_n \to 0$ oraz b_n jest ściśle monotoniczny od pewnego miejsca.

Uwaga. Twierdzenie niezwykle przydatne za każdym razem, gdy badamy zbieżność ułamka a_n/b_n, a ciągi różnic są łatwiejsze w analizie. W przyszłości ciągłym odpowiednikiem lematu Stolza będzie zasada de l'Hospitala.

Własności granic górnych i dolnych

Przypomnienie. Niech a_n będzie dowolnym ciągiem, a przez $\omega_{(a_n)} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ oznaczmy zbiór granic wszystkich podciągów (skończonych lub nie). Okazuje się, że $\omega_{(a_n)}$ ma element największy, który oznaczamy przez $\limsup a_n$ i nazywamy *granicą górną* ciągu a_n. Alternatywna definicja:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geqslant k} a_n.$$

Podobnie definiuje się *granicę dolną* $\liminf a_n$.

Zadanie 1. Załóżmy, że $g = \limsup a_n$ jest liczbą skończoną oraz $\varepsilon > 0$. Wówczas

(a) $a_n < g + \varepsilon$ dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$,

(b) istnieje nieskończenie wiele $n \in \mathbb{N}$, dla których $a_n > g - \varepsilon$.

Sformułować analogiczną własność w przypadku $g = +\infty$ i $g = -\infty$.

Zadanie 2. Dany jest ciąg a_n. Sprawdzić, że jeśli liczba $g \in \mathbb{R}$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$ spełnia własność (a) z poprzedniego zadania, to $\limsup a_n \leqslant g$. Natomiast jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ spełnia własność (b), to $\limsup a_n \geqslant g$.

Wskazówka. Oznacza to, że charakteryzację z poprzedniego zadania można przyjąć jako alternatywną definicję $\limsup a_n$.

Zadanie 3. Sprawdzić, że $\limsup(a_n + b_n) \leqslant \limsup a_n + \limsup b_n$ (o ile prawa strona nie jest symbolem nieoznaczonym).

Podać przykład ciągów a_n, b_n, dla których powyższa nierówność jest ostra.

Zadanie 4. Załóżmy, że ciągi a_n, b_n spełniają $a_n \leqslant b_n$ dla dostatecznie dużych n. Pokazać, że

$$\liminf a_n \leqslant \liminf b_n, \quad \limsup a_n \leqslant \limsup b_n.$$

Podać przykład ciągów a_n, b_n, dla których $\limsup a_n > \liminf b_n$.

Zadanie 5. Dla dowolnego ciągu a_n zachodzi $\limsup(-a_n) = -\liminf(a_n)$.

Rozwiązanie. Rozważmy zbiory $\omega_{(a_n)}$, $\omega_{(-a_n)}$ granic odpowiednich podciągów. Jeśli $g \in \omega_{(a_n)}$, to istnieje podciąg a_{n_k} zbieżny g, więc odpowiedni podciąg $-a_{n_k}$ zbiega do

$-g$, co dowodzi $-g \in \omega_{(-a_n)}$. To dowodzi zawierania $-\omega_{(a_n)} \subseteq \omega_{(-a_n)}$; analogicznie pokazujemy przeciwne zawieranie, zachodzi więc równość $\omega_{(-a_n)} = -\omega_{(a_n)}$. Stąd:

$$\limsup(-a_n) = \max(\omega_{(-a_n)}) = \max(-\omega_{(a_n)}) = -\min(\omega_{(a_n)}) = -\liminf(a_n).$$

$\square$

Definicja. Funkcję f nazywamy ciągłą, jeśli $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$ dla dowolnego ciągu zbieżnego x_n.

Zadanie 6. Jeśli funkcja f jest niemalejąca i ciągła, to

$$\limsup_{n\to\infty} f(a_n) = f(\limsup_{n\to\infty} a_n), \quad \liminf_{n\to\infty} f(a_n) = f(\liminf_{n\to\infty} a_n)$$

dla dowolnego ciągu a_n.

Uwaga. Jeśli w powyższych równościach pojawia się wielkość $f(\infty)$, to należy ją rozumieć jako granicę f w nieskończoności, czyli w tym przypadku $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Rozwiązanie. Rozważmy pierwszą z równości.
Gdy $\limsup a_n = \infty$, to istnieje podciąg $a_{n_k} \to \infty$ i dla niego $f(a_{n_k}) \to f(\infty)$, co dowodzi $f(\infty) \in \omega_{(f(a_n))}$. Z drugiej strony, $f(x) \leqslant f(\infty)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, więc $f(\infty)$ jest ograniczeniem górnym $\omega_{(f(a_n))}$. To oznacza, że musi być jego największym elementem.
Gdy $g := \limsup a_n$ jest skończone, istnieje podciąg $a_{n_k} \to g$ i dla niego $f(a_{n_k}) \to g$, a więc $\limsup f(a_n) \geqslant g$. Z drugiej strony, przyjmijmy $\varepsilon > 0$. Skoro dla dostatecznie dużych n zachodzi $a_n < g+\varepsilon$, to również $f(a_n) \leqslant f(g+\varepsilon)$, skąd $\limsup f(a_n) \leqslant f(g+\varepsilon)$. Stosując to rozumowanie dla $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ i powołując się na ciągłość f, otrzymujemy tezę.
Druga z równości może być zredukowana do pierwszej poprzez rozważenie ciągu $-a_n$ w miejsce a_n i funkcji $-f(-x)$ w miejsce $f(x)$. $\square$

Zadanie 7. Gdy f jest nierosnąca i ciągła, zachodzi

$$\limsup_{n\to\infty} f(a_n) = f(\liminf_{n\to\infty} a_n), \quad \liminf_{n\to\infty} f(a_n) = f(\limsup_{n\to\infty} a_n).$$

Wskazówka. Skorzystać z poprzedniego zadania dla funkcji $-f$.

Lemat Stolza (zastosowanie). Dane są dwa ciągi a_n, b_n, przy czym $b_n \nearrow \infty$. Wówczas

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}.$$

Uwaga. Nie ma tutaj założenia o zbieżności! A klasyczną wersję można wywnioskować, stosując powyższą nierówność dla par ciągów (a_n, b_n) i $(-a_n, b_n)$.

Rozwiązanie. Przyjmijmy $\varepsilon > 0$. Wówczas istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_k} < g+\varepsilon$ dla $k \geqslant m$. Rozważmy teraz $n > m$ i zsumujmy stronami nierówności

$$\begin{aligned}
a_{m+1}-a_m &< (g+\varepsilon)(b_{m+1}-b_m),\\
a_{m+2}-a_{m+1} &< (g+\varepsilon)(b_{m+2}-b_{m+1}),\\
&\dots\\
a_{n-1}-a_{n-2} &< (g+\varepsilon)(b_{n-1}-b_{n-2}),\\
a_n-a_{n-1} &< (g+\varepsilon)(b_n-b_{n-1}).
\end{aligned}$$

Otrzymujemy w rezultacie

$$\begin{aligned}
a_n - a_m &< (g+\varepsilon)(b_n-b_m),\\
a_n &< (g+\varepsilon)(b_n-b_m)+a_m,\\
\frac{a_n}{b_n} &< (g+\varepsilon) + \frac{(g+\varepsilon)b_m - a_m}{b_n} \qquad \text{dla } n > m.
\end{aligned}$$

Przy $n \to \infty$ prawa strona ostatniej nierówności jest zbieżna do $g+\varepsilon$, skąd wnioskujemy $\limsup \frac{a_n}{b_n} \leqslant g+\varepsilon$. Ponieważ rozumowanie to jest w mocy dla dowolnego $\varepsilon > 0$, otrzymujemy tezę. $\square$

Granice ciągów

Zadanie 1. Sprawdzić zbieżność ciagów rekurencyjnych

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}a_{n+1} + \frac{1}{n+2}a_n,$$
$$b_0 = 0,\ b_1 = 1,\ b_{n+2} = \frac{1}{n+2}b_{n+1} + \frac{n+1}{n+2}b_n.$$

Wyjątkowo nie jest wymagane wskazanie granicy.

Zadanie 2. Znaleźć granicę ciągu $\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+n}})$.

Zadanie 3. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \ldots + (3n-2)^3}{n^4}.$$

Zadanie 4. Wykazać, że ciąg $\frac{n!}{n^n}$ zbiega do zera.

Wskazówka. Zastosować nierówność między średnią arytmetyczną a geometryczną.

Zadanie 5. Znaleźć granicę ciągu

$$a_n = \sqrt{4n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n + 1} - n.$$

Zadanie 6. O ciągu a_n wiadomo, że

$$a_{2n} + a_{2n+1} \to A, \quad a_{2n} + a_{2n-1} \to B$$

dla pewnych liczb $A > B > 0$. Wyznaczyć granicę ciągu $\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$.

Wskazówka. Sprawdzić, że od pewnego miejsca ciąg a_{2n+1} zbiega monotonicznie do nieskończoności.

Zadanie 7. ★ Dany ciąg (x_n) o własnościach: $x_n \geqslant 0$ (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$); $x_{m+n} \leqslant x_m + x_n$ (dla $m, n = 1, 2, 3, \ldots$). Określamy nowy ciąg (y_n) wzorem: $y_n = \frac{x_n}{n}$ (dla $n = 1, 2, 3, \ldots$). Dowieść, że ciąg (y_n) jest zbieżny (do granicy skończonej).

Zadanie 8. ★ Niech $a_n = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Obliczyć $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n^2}$.

Zadanie 9. ★ Dany jest ciąg promieni $r_1, r_2, \ldots > 0$. Wiadomo, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją koła o promieniach $r_1, \ldots, r_n$ i parami rozłącznych wnętrzach, zawarte w kwadracie $[0, 1]^2$. Wykazać, że istnieje również nieskończony ciąg kół o promieniach $r_1, r_2, \ldots$ i parami rozłącznych wnętrzach, zawartych w tym samym kwadracie.

Wskazówka. Zastosować tzw. metodę przekątniową.

Praca domowa – granice ciągów

Termin: piątek 20 listopada, godz. 12.15

Zadanie 1. ☗ Sprawdzić zbieżność ciagów rekurencyjnych

$$c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_{n+2} = \frac{n+3}{n+2}c_{n+1} - \frac{1}{n+2}c_n,$$
$$d_0 = 0,\ d_1 = 1,\ d_{n+2} = \frac{2n+3}{n+2}d_{n+1} - \frac{n+1}{n+2}d_n.$$

Wyjątkowo nie jest wymagane wskazanie granicy.

Zadanie 2. ☗ Dowieść, że ciągi

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n},$$
$$b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

posiadają granice. Oznaczmy je odpowiednio przez A i B. Uszeregować liczby $A, B, 0, \frac{1}{2}, 1$ w kolejności niemalejącej (zaznaczając, jeśli któreś dwie są równe).

Zadanie 3. ☗ Obliczyć granice ciągów o podanych wyrazach:

$$b_n = \frac{3n^4 + \frac{7}{5}n^3 - 2n\sqrt{n} + (3/2)^n}{\frac{1}{3}n^4 + \frac{5}{7}n^3 - \frac{1}{2}n\sqrt{n} + (2/3)^n};$$
$$c_n = n\left(\sqrt[k]{a^k + \frac{1}{n}} - \sqrt[k]{a^k - \frac{1}{n}}\right) \quad (k \in \mathbb{N},\ a > 0 \text{ stałe}).$$

Zadanie 4. ☗ Ciąg x_n jest określony rekurencyjnie zależnością $x_{n+1} = \frac{3x_n+2}{x_n+2}$. W zależności od wyrazu początkowego $x_0 \geqslant 0$ ustalić, czy ciąg ma granicę i jaką.

Liczba e i przyjaciele

Skrót najważniejszych informacji. Liczba $e = \lim(1+\frac{1}{n})^n$ jest zdefiniowana wraz z funkcją wykładniczą $\exp(x) = e^x = \lim(1 + \frac{x}{n})^n$. Kilka podstawowych własności:

$$e^0 = 0,\ e^1 = e,$$
$$e^{x+y} = e^x e^y \text{ dla dowolnych } x, y \in \mathbb{R},$$
$$e^x \geqslant 1 + x \text{ dla } x \in \mathbb{R}, \quad e^x \leqslant \frac{1}{1-x} \text{ dla } x < 1,$$
$$\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty) \text{ jest funkcją rosnącą i } na.$$

Alternatywnie można definiować $e = \sum \frac{1}{n!}$ i $e^x = \sum \frac{x^n}{n!}$.

Ostatnia z własności pozwala zdefiniować funkcję odwrotną $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ (logarytm naturalny). Odnotujmy jej siostrzane własności:

$$\ln(1) = 0,\ \ln(e) = 1,$$
$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \text{ dla dowolnych } x, y > 0,$$
$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x \text{ dla } x > 0,$$
$$\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ jest funkcją rosnącą i } na.$$

Zadanie 1. Niech (a_n) będzie ciagiem zbieżnym do zera, spełniającym $a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Z ograniczeń $1 + x \leqslant e^x \leqslant \frac{1}{1-x}$ wywnioskować, że $\frac{e^{a_n}-1}{a_n} \to 1$.

Zadanie 2. Wykazać, że ciąg $a_n = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}$ jest rosnący i zbiega do e.

Wskazówka. Powiązać go z ciągiem $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

Zadanie 3. Znany jest *lemat o ciągach szybko zbieżnych do zera*:

$$na_n \to 0 \quad \Longrightarrow \quad (1 + a_n)^n \to 1.$$

Wykazać dużo prostszy *lemat o ciągach wolno zbieżnych do zera*:

$$na_n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad (1 + a_n)^n \to \infty.$$

Zadanie 4. Znaleźć granicę ciągu

$$a_n = n\left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$$

w zależności od stałej $a > 0$.

Zadanie 5. Znaleźć granicę ciągu

$$b_n = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt[n]{a}\right)^n$$

w zależności od stałej $a > 0$.

Zadanie 6. Sprawdzić, że jeśli $a_n \to 0$ i $b_n \to \infty$, a ciąg $a_n b_n$ zbiega do dodatniej skończonej granicy g, to ciąg $(1 + a_n)^{b_n}$ jest zbieżny do e^g.

Zadanie 7. Wykazać, że ciąg $\frac{\ln n}{n^p}$ zbiega do zera dla dowolnego $p > 0$.

Zadanie 8. Obliczyć granice (lub wykazać, że któraś nie istnieje):

(a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}\right)^n$;

(b) $\lim_{n\to\infty} n^w \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$ (gdzie $0 < w < 1$ jest stałą);

(c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$ (gdzie $a, b, c > 0$ są stałe)

Zadanie 9. Niech $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n}$. Z wykładu wiadomo, że ciąg $H_n - \ln n$ jest zbieżny do stałej Eulera-Mascheroniego $\gamma \approx 0{,}577$. Stąd (i z $H_n \to \infty$) wynika w szczególności, że ciąg $\frac{H_n}{\ln n}$ jest zbieżny do jedynki.

Dowieść bezpośrednio, że $\frac{H_n}{\ln n} \to 1$.

Zadanie 10. Wiadomo, że $(1 + \frac{1}{n})^n \nearrow e$. Wykazać, że

$$\left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right)^n \to e^{-1/2}.$$

Wskazówka. Skorzystać z granicy $\frac{\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \to -\frac{1}{2}$, którą uzasadnimy za kilka tygodni.

Uwaga. Można wykazać, że ciąg w zadaniu jest malejący, co pozwala poprawić znane nam oszacowanie $\frac{n!}{(n+1)^n} \leqslant e^n$ do oszacowania $\frac{n!}{(n+1)^n} \geqslant e^n \cdot n^{-1/2} \cdot e^{-\gamma_n/2}$ (gdzie γ_n jest ciągiem definiującym stałą Eulera-Mascheroniego).

Zadanie 11. ★ Niech x_n będzie dodatnim pierwiastkiem wielomianu $x(x+1)^n - 1$. Znaleźć ciąg (a_n) dany wyraźnym wzorem taki, by zachodziła równość asymptotyczna $x_n \sim a_n$ (przy $n \to \infty$), to znaczy $a_n/x_n \to 1$.

Zadanie 12. ★ Dany ciąg liczb dodatnich a_n. Określamy ciąg c_n wzorem $c_n = \left(\frac{1+a_n}{a_{n-1}}\right)^n$. Dowieść, że $\limsup c_n \geqslant e$.

Zadanie 13. ★ Niech $\{x\} := x - [x]$ oznacza część ułamkową liczby x, a γ oznacza stałą Eulera-Mascheroniego. Wykazać, że

$$\frac{1}{N}\sum_{d=1}^{N}\left\{\frac{N}{d}\right\} \longrightarrow 1-\gamma.$$

Wskazówka. Można to zrobić w następujących czterech krokach.[1]

(a) Uzasadnić równość

$$\sum_{d\leqslant N}\frac{N}{d} - \sum_{d\leqslant N}\left\{\frac{N}{d}\right\} = \sum_{a\cdot b\leqslant N} 1.$$

(b) Stosując wzór włączeń i wyłączeń, wyprowadzić

$$\sum_{a\cdot b\leqslant N} 1 = \sum_{a\leqslant\sqrt{N}}\left[\frac{N}{a}\right] + \sum_{b\leqslant\sqrt{N}}\left[\frac{N}{b}\right] - \left[\sqrt{N}\right]^2.$$

(c) Uzasadnić, że prawa strona jest równa

$$2\sum_{d\leqslant\sqrt{N}}\frac{N}{d} - N + E_N$$

dla pewnej liczby E_N spełniającej $|E_n| \leqslant 3\sqrt{N}$.

(d) Uzasadnić i wykorzystać zbieżność

$$\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{d} - \ln x \longrightarrow \gamma.$$

[1] *Uwaga notacyjna:* przez sumę $\sum_{p(d)}$ rozumiemy sumę po wszystkich liczbach naturalnych $d \in \{1,2,\ldots\}$ spełniających warunek $p(d)$. Podobnie suma $\sum_{q(a,b)}$ oznacza sumowanie po parach (a,b) spełniających $q(a,b)$.

Zestaw rozgrzewkowy przed kolokwium

Zadanie 1. Dane są liczby $a < b$ oraz $x \neq 0$. Wykazać, że istnieje liczba wymierna $q \in \mathbb{Q}$, dla której $a < qx < b$.

Zadanie 2. Wykazać, że $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną.

Zadanie 3. O ciągu x_n wiadomo, że $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wykazać, że zbiór

$$X = \left\{ \frac{x_n}{n} : n = 1, 2, \ldots \right\}$$

jest ograniczony i $\inf X = 0$.

Zadanie 4. Wykazać, że każda liczba naturalna $n \geqslant 8$ daje się przedstawić jako suma trójek i piątek. Innymi słowy, dla każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ istnieją $a, b \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ spełniające $n = 3a + 5b$.

Zadanie 5. O ciągu (a_n) wiemy, że istnieje liczba $g \in \mathbb{R}$ taka, że

$$\lim_{n\to\infty} a_{kn} = g \quad \text{dla dowolnego } k = 2, 3, 4, \ldots.$$

Czy wynika stąd, że a_n zbiega do g?

Zadanie 6. Załóżmy, że ciąg $a_n \in \mathbb{R}$ ma następujące własności:

- posiada podciąg zbieżny do -1;
- posiada podciąg zbieżny do 1;
- $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

Wykazać, że posiada również podciąg zbieżny do 0.

Zadanie 7. Wyznaczyć zbiór wszystkich wartości (skończonych lub nie), które można uzyskać jako granicę ciągów postaci $x_n = a_n^{b_n}$, przy czym $a_n > 0$ oraz

(a) $a_n \to 0$, $b_n \to 0$;

(b) $a_n \to 1$, $b_n \to \infty$.

Zadanie 8. Zbadać zbieżność ciągu zadanego rekurencyjnie: $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n(5-x_n)$.

Zadanie 9. Znaleźć granicę ciągu $\frac{3\sqrt{n}}{2^n}$.

Zadanie 10. Znaleźć granicę ciągu: $x_0 = 2$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{5}{x_n})$.

Zadanie 11. Zbadać zbieżność ciągu

$$a_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}} \quad (n \text{ pierwiastków, } n \text{ szóstek}).$$

Zadanie 12. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ dany jest przedział $I_n = [a_n, b_n]$. Pokazać, że jeśli $I_{n+1} \subseteq I_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to część wspólna $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ jest niepusta.

Kolokwium 28.11.2020

Zadanie 1. Niech $s_0 = \sqrt{2}$ oraz $s_{n+1} = \sqrt{2 + s_n}$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$. Wykazać, że każda liczba w tym ciągu jest niewymierna.

Zadanie 2. Znaleźć kresy zbioru

$$B = \left\{ \frac{n}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Uwaga. Proszę zwrócić uwagę, że n przyjmuje również wartości ujemne.

Zadanie 3. Ciąg Fibonacciego zadany jest przez

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Wykazać, że dwa kolejne wyrazy zawsze są względnie pierwsze, to znaczy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jedyną liczbą $d \in \mathbb{N}$ dzielącą jednocześnie F_n i F_{n+1} jest $d = 1$.

Zadanie 4. Wykazać, że ciąg rekurencyjny

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

jest zbieżny. Wyznaczyć jego granicę.

Zadanie 5. Dane są ciągi

$$a_n = n\sqrt{n^2 + 1} - n^2, \quad b_n = n^2 - n\sqrt{n^2 - 1} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Sprawdzić, że każdy z nich jest monotoniczny. Znaleźć granicę ciągu (a_n) oraz granicę ciągu (b_n).

Zadanie 6. ★ O ciągu (a_n) wiadomo, że

$$\lim_{n \to \infty} \left(a_{n+1} - \frac{a_n}{2} \right) = 0.$$

Wykazać, że $a_n \to 0$.

Wprowadzenie do szeregów liczbowych

Definicja Suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ to nic innego jak granica ciągu sum częściowych $s_n = a_1 + \ldots + a_n$.

Oczywiście może istnieć lub nie.

Przydatna uwaga. Gdy $a_n \geqslant 0$, to granica s_n zawsze istnieje. Są dwie możliwości: granica jest skończona ($\sum a_n \in [0, \infty)$) lub nieskończona ($\sum a_n = \infty$).

Zadanie 1. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$.

Zadanie 2. Sprawdzić kryteria Cauchy'ego i d'Alemberta dla szeregu $\sum \frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

Zadanie 3. Zbadać zbieżność szeregu $\sum 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Zadanie 4. Sprawdzić zbieżność szeregu $\sum \frac{n}{3^n}$ i obliczyć jego granicę.

Zadanie 5. Dla jakiej wartości stałej $c > 0$ szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n n!}{n^n}$$

jest zbieżny, a dla jakiej nie?

Zadanie 6. Sprawdzić, że szereg $\sum \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny dla $p > 1$, a rozbieżny dla $p \leqslant 1$.

Zadanie 7. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{c}{n^p}\right)$$

w zależności od parametrów $c, p > 0$.

Zadanie 8. Zbadać zbieżność szeregu $\sum \frac{1}{\sqrt{3n^3 - 2n^2}}$.

Zadanie 9. ★ Mamy szereg zbieżny o wyrazach $a_n > 0$. Niech $b_n := a_n^{1-\frac{1}{n}}$. Czy ze zbieżności szeregu $\sum a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum b_n$?

Szeregi o wyrazach nieujemnych

Zadanie 1. Dany jest ciąg $a_n \geqslant 0$ oraz ciąg $b_n = \sqrt[3]{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$. Dowieść, że jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to również szereg $\sum b_n$ jest zbieżny.

Zadanie 2. Dla każdego z podanych szeregów należy ustalić, czy jest zbieżny, czy rozbieżny (odpowiedź może zależeć od występujących stałych – tzw. *parametrów*).

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-w} \left(\sqrt[3]{8 + \frac{1}{n}} - 2 \right)$ (zależnie od stałej $w > 0$)

(b) $\displaystyle\sum_{n=2020}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n) \cdot (\ln \ln n)^p}$ (zależnie od stałej $p > 0$)

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n}{e^{n \sqrt[n]{n}} \cdot n}$

Zadanie 3. (kryterium Raabego) Jeśli $a_n > 0$ i $R_n := n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$, to

$$\begin{aligned} \limsup R_n > 1 \quad &\Longrightarrow \quad \sum a_n < \infty, \\ R_n \leqslant 1 \quad \text{ddd. } n \quad &\Longrightarrow \quad \sum a_n = \infty. \end{aligned}$$

Wskazówka. Porównać z szeregiem $\sum \frac{1}{n^s}$ dla odpowiedniego s.

Zadanie 4. Zbadać zbieżność szeregu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \binom{2n}{n} 4^{-n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}.$$

Zadanie 5. (kryterium Kummera) Szereg $\sum a_n$ o wyrazach dodatnich jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $b_n > 0$ i stała $g > 0$ takie, że

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot b_n - b_{n+1} \geqslant g \quad \text{ddd. } n.$$

Wskazówka. W jedną stronę – przyjąć $b_n = \frac{\sum_{k>n} a_k}{a_n}$. W drugą – zastosować argument teleskopowy.

Zadanie 6. W kryterium Kummera

(a) sprawdzić, jakie kryterium otrzymujemy dla $b_n = 1$;

(b) sprawdzić, jakie kryterium otrzymujemy dla $b_n = n$;

(c) sprawdzić bezpośrednio, że dla $a_n = \frac{1}{n}$ taki ciąg $b_n > 0$ i stała $g > 0$ nie istnieją.

Zadanie 7. ★ Rozważamy szeregi zbieżne postaci $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{a_{n+1}}$, gdzie $1 = a_0 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$. Obliczyć kres dolny zbioru sum wszystkich takich szeregów.

Zadanie 8. ★ Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach nieujemnych jest zbieżny do sumy s. Oznaczmy $g_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ jest zbieżny do sumy niewiększej niż $e \cdot s$.

Praca domowa – zbieżność szeregów

Zadanie 1. Obliczyć sumę szeregu

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\dots$$

Zadanie 2. Wyjaśnić, czy następujące szeregi są zbieżne:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}+\sqrt[5]{n}+\sqrt[6]{n}\right)^{-6}}{\left(\sqrt[7]{n}+\sqrt[8]{n}+\sqrt[9]{n}+\sqrt[10]{n}\right)^{-10}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\ln(n^3+n+1)-\ln(n^3-n)\Big)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(\ln n)^{-\ln\ln n}$

Przypomnienie. Szereg $\sum n^{-p}$ jest zbieżny dokładnie dla $p>1$.

Zadanie 3. Dla każdego z podanych szeregów należy ustalić, czy jest zbieżny, czy rozbieżny (odpowiedź może zależeć od występujących stałych – tzw. *parametrów*).

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}-1}{\sqrt{n}}c^n$ (gdzie $c>0$)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n+b^{2n}}$ (gdzie $b>0$)

Zadanie 4. Dane są ciągi liczb dodatnich (a_n) i (b_n). Zakładamy, że szeregi $\sum\frac{a_n^2}{b_n}$ i $\sum\frac{b_n^2}{a_n}$ są zbieżne. Czy stąd wynika zbieżność szeregów $\sum a_n$ i $\sum b_n$?

Sumowanie à la Lebesgue

Zadanie 1. Niech $a\colon X \to [0,\infty)$ będzie funkcją nieujemną określoną na dowolnym zbiorze. Rozważmy

$$\sum a := \sup_{Y \subseteq X \text{ sk.}} \left\{ \sum_{y \in Y} a(y) \right\},$$

czyli supremum ze wszystkich skończonych sum wartości a. Wykazać, że w przypadku funkcji $a\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$, czyli ciągu o wyrazach nieujemnych, tak zdefiniowana wartość $\sum a$ jest równa sumie szeregu $\sum a_n$.

Uwaga. Wynika stąd, że w szeregu o wyrazach nieujemnych możemy dowolnie permutować wyrazy, nie zmieniając sumy.

Uwaga. W ten sam sposób można zdefiniować sumę szeregu o wyrazach dowolnych. Dla $a\colon X \to \mathbb{R}$ wprowadźmy zbiory

$$X^+ := \{x \in X : a(x) \geqslant 0\}, \qquad X^- := \{x \in X : a(x) < 0\}$$

i pomocnicze funkcje nieujemne $a^+ := a|_{X^+}$, $a^- := -a|_{X^-}$. Jeśli tylko obie mają skończone sumy (lub równoważnie $\sum |a| < \infty$), to możemy zdefiniować $\sum a := \sum a^+ - \sum a^-$. W dalszej części będziemy jednak przyjmować dla wygody, że $a(x) \geqslant 0$.

Zadanie 2. Załóżmy, że zbiór X daje się rozłożyć na sumę rozłączną $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Sprawdzić, że wówczas

$$\sum a = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum a|_{X_n} \right),$$

gdzie $\sum a|_{X_n}$ jest sumą obciętej funkcji $a\colon X_n \to [0,\infty)$.

Wywnioskować stąd, że dla podwójnie indeksowanego ciągu $a_{n,k} \geqslant 0$ zachodzi równość

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k}.$$

Zadanie 3. Wyznaczyć sumę szeregu $\sum n^2 q^n$ dla $q \in (0,1)$.

Zadanie 4. Wprowadźmy funkcję dzeta Riemanna wzorem

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{dla } s > 1.$$

Obliczyć $\sum_{k=2}^{\infty}(\zeta(k) - 1)$.

Zadanie 5. Udowodnić równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \binom{2n}{n}^{-1}.$$

Wskazówka. Rozważyć $a_{n,k} = \frac{(k-1)!(n-1)!}{(k+n)!}$.

Zadanie 6. ★ (a) (lemat Fatou) Jeśli $a^k \colon X \to [0, \infty)$ jest ciągiem funkcji nieujemnych oraz $a(x) := \liminf a^k(x)$ dla każdego $x \in X$, to

$$\sum a \leqslant \liminf_{k \to \infty} \sum a^k.$$

(b) (twierdzenie Lebesgue'a) Załóżmy, że $a^k \colon X \to \mathbb{R}$ jest dowolnym ciągiem funkcji zbieżnym punktowo do $a \colon X \to \mathbb{R}$, to znaczy $a^k(x) \to a(x)$ dla każdego $x \in X$. Załóżmy dodatkowo, że istnieje funkcja $g \colon X \to [0, \infty)$ (*majoranta*) spełniająca $\sum |g| < \infty$ oraz $|a^k(x)| \leqslant g(x)$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i $x \in X$.
Wówczas funkcja a spełnia $\sum |a| < \infty$ oraz zachodzi zbieżność

$$\sum a^k \xrightarrow{k \to \infty} \sum a.$$

Zbieżność szeregów – podsumowanie

Uwaga. Gdy wyrazy $a_n \geqslant 0$ są nieujemne, to szereg $\sum a_n$ zawsze posiada granicę, są tylko dwie możliwości: $\sum a_n \in [0, \infty)$ (szereg zbieżny) lub $\sum a_n = \infty$ (szereg rozbieżny). Dlatego będziemy czasami pisali $\sum a_n < \infty$ na zaznaczenie, że zachodzi pierwsza możliwość. Dla szeregów o wyrazach dowolnych taki zapis jest bardzo mylący.

Kryterium porównawcze Jeśli $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, to

$$\begin{aligned} \sum b_n < \infty \quad &\Longrightarrow \quad \sum a_n < \infty, \\ \sum a_n = \infty \quad &\Longrightarrow \quad \sum b_n = \infty. \end{aligned}$$

Kryterium asymptotyczne Jeśli $a_n, b_n > 0$, a ciąg $\frac{a_n}{b_n}$ zbiega do skończonej dodatniej granicy, to

$$\sum a_n < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \sum b_n < \infty.$$

Kryterium Cauchy'ego (porównanie z szeregiem geometrycznym) Jeśli $a_n \geqslant 0$ i $l := \limsup \sqrt[n]{a_n}$, to

$$\begin{aligned} l < 1 \quad &\Longrightarrow \quad \sum a_n < \infty, \\ l > 1 \quad &\Longrightarrow \quad \sum a_n = \infty. \end{aligned}$$

Kryterium d'Alemberta (porównanie z szeregiem geometrycznym) Jeśli $a_n > 0$, $M := \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ i $m := \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$, to

$$\begin{aligned} M < 1 \quad &\Longrightarrow \quad \sum a_n < \infty, \\ m > 1 \quad &\Longrightarrow \quad \sum a_n = \infty. \end{aligned}$$

Kryterium zagęszczeniowe Jeśli $a_n \geqslant 0$ i ciąg a_n jest malejący, to

$$\sum a_n < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum 2^n a_{2^n} < \infty.$$

Uwaga. Następne kryteria dotyczą szeregów o wyrazach dowolnych. Mówimy wtedy o szeregach zbieżnych i rozbieżnych (zależnie od tego, czy ciąg sum częściowych ma skończoną granicę). Przy tym szereg zbieżny $\sum a_n$ jest *zbieżny bezwględnie*, gdy $\sum |a_n| < \infty$, a *zbieżny warunkowo* w przeciwnym przypadku.

Kryterium Leibnitza Jeśli $a_n \searrow 0$, to szereg $\sum (-1)^n a_n$ jest zbieżny.

Kryterium Dirichleta Jeśli

- $a_n \searrow 0$,
- sumy częściowe ciągu b_n są ograniczone,

to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

Kryterium Abela Jeśli

- ciąg a_n jest monotoniczny i ograniczony,
- szereg $\sum b_n$ jest zbieżny,

to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

Szeregi o wyrazach dowolnych

Zadanie 1. W sumie nieskończonej

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

wstawić nawiasy na dwa sposoby – by otrzymać granicę 0 albo granicę 1. Pokazać, że jeśli dodatkowo zmienić kolejność składników, to można otrzymać $+\infty$.

Zadanie 2. Obliczyć sumę szeregu anharmonicznego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots .$$

Wskazówka. Wyrazić sumy częściowe tego szeregu przez sumy częściowe $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Zadanie 3. Zbadać zbieżność szeregu $\sum \frac{c^n}{n+c^{2n}}$ w zależności od $c \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n/7]}}{\sqrt{n}}$$

Zadanie 5. Niech (b_n) będzie ciągiem zbieżnym. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + b_n}.$$

Zadanie 6. Zbadać w zależności od stałej $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n$ jest zbieżny.

Wskazówka. Rozważyć zbieżność w zależności od stałej $w := \frac{z}{z-1}$.

Zadanie 7. Czy szereg $\sum_{n=2} \frac{1}{n} \sin\left(n + (\ln n)^{-2}\right)$ jest zbieżny?

Wskazówka. Porównać z szeregiem $\sum \frac{1}{n} \sin(n)$.

Zadanie 8. Zdefiniujmy $\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $a \in \mathbb{R}$. Sprawdzić, że szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$$

(a) jest zbieżny dla $|x| < 1$ i $a \in \mathbb{R}$;

(b) jest rozbieżny dla $|x| > 1$ i $a \in \mathbb{R}$;

(c) jest zbieżny dla $|x| = 1$ i $a \geqslant 0$.

Uwaga. Przekonamy się kiedyś, że sumą tego szeregu jest liczba $(1+x)^a$. Na razie jest to jasne jedynie w przypadku $a \in \mathbb{N}$.

Zadanie 9. Zdefiniujmy funkcję cosinus wzorem

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Sprawdzić, że powyższy szereg jest bezwzględnie zbieżny dla każdego $\mathbb{R}$. Sprawdzić też, że zachodzi równość $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

Wskazówka. Obliczyć iloczyn Cauchy'ego i wykorzystać tożsamość $\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \ldots + \binom{2n}{2n} = 2^{2n-1}$ dla $n \geqslant 1$.

Zadanie 10. W podobny sposób uzasadnić tożsamość $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, gdzie

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 11. Znaleźć iloczyn Cauchy'ego szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ oraz $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n!}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ oraz $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ oraz $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$.

Zadanie 12. ★ Ciąg (c_n) o wyrazach $c_n \in \{-1, +1\}$ spełnia warunek $\lim_{n\to\infty} \frac{c_1 + \ldots + c_n}{n} = 0$ (tzn. plusy i minusy występują *z jednakową częstością*). Czy stąd wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n}$ jest zbieżny?

Zadanie 13. ★ Dane są liczby $\alpha, \beta > 0$. Dowieść, że iloczyn Cauchy'ego szeregów $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ i $\sum \frac{(-1)^n}{n^\beta}$ jest szeregiem zbieżnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha + \beta > 1$.

Praca domowa – szeregi o dowolnych wyrazach

Zadanie 1. Dla każdego z podanych szeregów należy ustalić, czy jest on zbieżny bezwzględnie, zbieżny warunkowo, czy rozbieżny.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n+2} \sin\left(\frac{2n-1}{4}\pi\right)$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln(n^2+\sqrt{n}) - 2\ln n\right) \cdot q^n$ (zależnie od stałej $q \in \mathbb{R}$).

Zadanie 2. Wiemy już, że szereg $\sum \frac{\sin(n\alpha)}{n}$ jest zbieżny dla $\frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$. Czy bezwzględnie?

Wskazówka. $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

Zadanie 3. Weźmy szereg postaci $\sum \pm\frac{1}{n}$, gdzie p pierwszym wyrazom przypiszmy znak $+$, q kolejnym wyrazom znak $-$, p razy $+$, q razy $-$, itd. Rozstrzygnąć, dla jakich liczb naturalnych p, q tak powstały szereg jest zbieżny.

Inaczej mówiąc: rozważamy szereg $\sum \frac{a_n}{n}$, gdzie $a_n = 1$ dla $n \bmod (p+q) \in \{1, 2, \ldots, p\}$ i $a_n = -1$ w przeciwnym przypadku.

Szeregi przeróżne

Zadanie 1. Wykazać, że szereg $\sum \frac{\sin(n\alpha)}{n}$ jest zbieżny dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$.
Wskazówka. W przypadku $\frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$ rozważyć szereg $\sum \frac{z^n}{n}$ dla $z = e^{i\alpha}$.

Zadanie 2. Wykazać zbieżność szeregu $\sum \frac{(-1)^{[\sqrt{n-1}]}}{n}$.
Wskazówka. Skorzystać z nierówności $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(1+\frac{1}{n}) \leqslant \frac{1}{n}$.

Zadanie 3. Zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/3)}{\sqrt{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}(e^c-2)^n}{2n^2-8n+1}$ (zależnie od stałej $c \in \mathbb{R}$).

Zadanie 4. W szeregu $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$ zmieniamy kolejność: p kolejnych wyrazów dodatnich, q kolejnych wyrazów ujemnych, znów p kolejnych dodatnich, q kolejnych ujemnych, itd. ($p, q \in \mathbb{N}$ ustalone). Sprawdzić zbieżność powstałego szeregu w zależności od p i q.
Przykład. Dla $p = 3$, $q = 2$ to szereg $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots$.

Zadanie 5. Zbadać zbieżność iloczynów nieskończonych

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right), \qquad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right),$$

rozumianą jako zbieżność odpowiednich iloczynów częściowych.

Zadanie 6. Liczbę n nazywamy bezkwadratową, jeśli nie jest podzielna przez kwadrat żadnej liczby naturalnej poza jedynką. Niech (a_n) będzie ciągiem wszystkich kolejnych liczb bezkwadratowych, czyli $1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, \ldots$.
Zbadać zbieżność szeregu $\sum \frac{1}{a_n}$.
Wskazówka. Każdą liczbę naturalną można przedstawić jednoznacznie jako iloczyn kwadratu i liczby bezkwadratowej.

Zadanie 7. Oznaczmy przez (p_n) ciąg kolejnych liczb pierwszych, czyli $2, 3, 5, \ldots$. Wykazać, że szereg $\sum \frac{1}{p_n}$ jest rozbieżny.

Wskazówka. Rozważyć iloczyn nieskończony $\prod(1 + \frac{1}{p_n})$.

Zadanie 8. Niech a_n oznacza liczbę przedstawień n jako iloczynu różnych liczb naturalnych (większych od 1). Np.

$a_{60} = 9,$ bo $60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 3 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 6 = 3 \cdot 20 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12 = 6 \cdot 10.$

Wykazać, że

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n^p} < \infty \qquad \text{dla } p > 1.$$

Wskazówka. Rozważyć iloczyn nieskończony $\prod(1 + \frac{1}{n^p})$.

Funkcja wykładnicza raz jeszcze

Zadanie 1. Wykazać, że
$$\frac{1}{n+1} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} < \frac{1}{n}$$
i wywnioskować, że e jest liczbą niewymierną.

Zadanie 2. Jaką postać mają na płaszczyźnie zespolonej zbiory $\{z \in \mathbb{C} : e^z = -2\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |e^{iz}| \geqslant |e^z|\}$?

Zadanie 3. Rozwiązać równanie $\cos z = 3$.

Zadanie 4. Wyznaczyć długość okręgu jednostkowego zdefiniowaną jako supremum z obwodów wielokątów wpisanych w ten okrąg.

Zadanie 5. Zbadać monotoniczność funkcji $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ oraz $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ i naszkicować ich wykresy. Wyprowadzić *hiperboliczną jedynkę trygonometryczną* $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Zadanie 6. Korzystając z rozwinięcia $\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$, wyprowadzić wzór Wallisa w następujących równoważnych formach:
$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{2}{\pi}, \quad (2n+1) \cdot \left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right)^2 \longrightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \sqrt{n}\binom{2n}{n}4^{-n} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Granica funkcji

Zadanie 1. Jeśli funkcje $f, g, h\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ są związane zależnością $g(x) = f(1/x)$ i $h(x) = f(x + a)$, to granice $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} g(x)$ i $\lim_{x\to a} h(x)$ są tożsame.

Zadanie 2. Zbadać istnienie granic

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x-2}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{(x^3-2x^2+x)^2}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x-1}.$$

Zadanie 3. Obliczyć granice:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+4}-2}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^x-1}{x-1}.$$

Zadanie 4. Sprawdzić następujące granice funkcji:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e,$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} x^x = 1.$$

Zadanie 5. Obliczyć granice:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-2x)}{e^{3x}-1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}} - \sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x^2-1}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}}\right)^x$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[k]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ (stałe: $k, m \in \mathbb{N}$)

Zadanie 6. Wyznaczyć granice funkcji:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sum_{k=1}^{[1/|x|]} k, \qquad \lim_{x\to 0^+} x \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k}{x}\right] \quad (n \text{ ustalone}).$$

Zadanie 7. Niech $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją, która w każdym przedziale $[a, b]$ jest ograniczona. Badamy warunki:

(a) istnieje skończona granica $\lim_{x\to\infty}(f(x+1)-f(x))$;

(b) istnieje skończona granica $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Czy (a) implikuje (b)? Czy (b) implikuje (a)?

Zadanie 8. Niech $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą oraz $p\in(a,b)$. Wykazać, że

$$\lim_{x\to p^+} f(x)=\inf_{x>p} f(x), \qquad \lim_{x\to p^-} f(x)=\sup_{x<p} f(x).$$

Ciągłość funkcji

Zadanie 1. Znaleźć wartości $a, b \in \mathbb{R}$, dla których funkcja

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ dla } x \neq 0, 1, \\ f(0) = a,\ f(1) = b \end{cases}$$

jest ciągła na $\mathbb{R}$.

Zadanie 2. Czy da się tak dobrać wartości a, b, c, żeby funkcja

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} f(x) = \exp(\frac{1}{\ln|x|}) \text{ dla } x \neq 0, \pm 1, \\ f(-1) = a,\ f(0) = b,\ f(1) = c \end{cases}$$

była

(a) ciągła w $\mathbb{R}$?

(b) ciągła lewostronnie we wszystkich punktach?

(c) ciągła prawostronnie we wszystkich punktach?

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to [a,b]$ jest ciągła, to istnieje punkt $x \in [a,b]$, w którym $f(x) = x$.

Uwaga. Twierdzenie Brouwera mówi, że punkt stały można znaleźć dla każdej funkcji ciągłej $f\colon [0,1]^k \to [0,1]^k$.

Zadanie 4. Sprawdzić, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

nie jest ciągła, ale posiada własność Darboux.

Zadanie 5. (tw. Borsuka-Ulama) Funkcja $F\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ (z okręgu jednostkowego $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}$) jest ciągła. Wykazać istnienie punktów antypodycznych $p_1, p_2 \in \mathbb{S}^1$, dla których $F(p_1) = F(p_2)$.

Uwaga. W razie skrupułów można utożsamiać F z ciągłą funkcją 2π-okresową $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a punkty antypodyczne z liczbami odległymi o π (a to dzięki utożsamieniu $t \in \mathbb{R}$ z $e^{it} \in \mathbb{S}^1$).

Zadanie 6. Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą spełniającą $f(a) = f(b)$ i $b-a \in \mathbb{N}$. Wtedy istnieje punkt $x \in [a, b-1]$, dla którego $f(x) = f(x+1)$.

Zadanie 7. (uzupełnienie poprzedniego zadania) Dane są liczby $a, b \in \mathbb{R}$ spełniające $b-a > 1$ i $b-a \notin \mathbb{N}$. Znaleźć przykład funkcji ciągłej $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ spełniającej warunki

$$f(a) = f(b), \qquad \forall_{x \in [a,b-1]}\ f(x) \neq f(x+1).$$

Zadanie 8. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Zakładamy, że istnieją liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$ o własnościach: $a < b < c$, $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$. Dowieść, że istnieją liczby $u, v \in \mathbb{R}$ takie, że $u < v$, $f(u) = v$ i $f(v) = u$.

Zadanie 9. Dane są funkcje ciągłe $f, g\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Funkcja f jest ograniczona z dołu i z góry. Funkcja g jest nieograniczona z dołu i z góry. Wykazać, że istnieje ciąg $x_n \geqslant 0$ o własnościach

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty, \qquad f(x_n) = g(x_n) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zadanie 10. Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą. Wykazać, że jest ona ciągła wszędzie poza najwyżej przeliczalnie wieloma punktami.

Zadanie 11. O funkcji ciągłej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wiadomo, że

$$f(0) = 1, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Wykazać, że funkcja f jest ograniczona i istnieje punkt $x_0 \in \mathbb{R}$, dla którego $f(x_0) = \sup f$.

Uwaga. Problemy *optymalizacyjne* jak powyżej są bardzo ważne. Pojęcie pochodnej pozwoli nam nie tylko dowodzić istnienia x_0, ale również znajdować ten punkt.

Zadanie 12. ★ Niech $f\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o następującej własności:

$$\lim_{\mathbb{N} \ni n \to \infty} f(c/n) = 0 \quad \text{dla każdego } c > 0.$$

Czy stąd wynika, że $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$?

Ciągłość funkcji – kontrprzykłady

Zadanie 1. Z wykładu znana jest funkcja Dirichleta

$$D\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad D(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nieciągła w żadnym punkcie. Zbadać ciągłość funkcji

$$xD(x), \quad (x-1)(x-2)(x-3)D(x), \quad \sin x \cdot D(x).$$

Zadanie 2. Umówmy się, że każdą liczbę wymierną zapisujemy jako ułamek $\frac{p}{q}$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$, a $q \in \mathbb{N}$ najmniejsze możliwe. Zbadać ciągłość funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanej przez

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zadanie 3. Skonstruować funkcję niemalejącą $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągłą we wszystkich punktach niewymiernych, a nieciągłą we wszystkich punktach wymiernych.

Zadanie 4. ★ Czy istnieje funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła we wszystkich punktach wymiernych, a nieciągła we wszystkich punktach niewymiernych?

Ciągłość jednostajna

Zadanie 1. Sprawdzić, że jednostajna ciągłość funkcji $f\colon A \to \mathbb{R}$ jest równoważna implikacji

$$x_n, y_n \in A, \quad x_n - y_n \to 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$

Zadanie 2. Sprawdzić, czy funkcja $\sin x^2$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

Zadanie 3. Sprawdzić, że funkcja $\sqrt{x}$ jest jednostajnie ciągła na $[0, \infty)$.

Zadanie 4. Dana jest funkcja $f\colon A \to \mathbb{R}$ określona na odcinku A oraz ciągi $x_n, y_n \in A$ takie, że ciąg $x_n - y_n$ jest ograniczony, a ciąg $f(x_n) - f(y_n)$ nie. Wykazać, że funkcja f nie jest jednostajnie ciągła.

Zadanie 5. Czy funkcja $f(x) = x \cdot \cos x$ jest ciągła jednostajnie na $\mathbb{R}$?

Zadanie 6. Zbadać, czy funkcja $f(x) = x \cdot \sin(1/x)$ jest ciągła jednostajnie na przedziale $(0, \infty)$.

Zadanie 7. Zbadać, czy funkcja $f(x) = \ln(x^2 + \frac{1}{x})$ jest ciągła jednostajnie na przedziale $[1, \infty)$. A na $(0, 1]$?

Zadanie 8. Zbadać, czy funkcja $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ jest ciągła jednostajnie:

(a) na przedziale $(0, 1]$?

(b) na przedziale $[1, \infty)$?

Praca domowa – ciągłość funkcji

Zadanie 1. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin x + \cos x}{\sin(4x)}$$

lub wykazać, że ta granica nie istnieje.

Uwaga. To zadanie zaczerpnięte z serii treningowej.

Zadanie 2. Dobrać wartości $a, b > 0$ w taki sposób, by funkcja

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} a \cdot \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{1+e^{\operatorname{tg} x}} & \text{dla } |x| < \frac{\pi}{2} \\ b^x - \frac{1}{2} & \text{dla } |x| \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

była ciągła na $\mathbb{R}$.

Uwaga. To zadanie zaczerpnięte z jawnej puli.

Zadanie 3. Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Dla każdego $\varepsilon > 0$ określmy funkcję $\delta_\varepsilon\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\delta_\varepsilon(x) := \sup\Big\{\delta > 0 : |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \text{ dla } y \in [0,1] \cap [x-\delta, x+\delta]\Big\}.$$

(a) Uzasadnić, że jest to funkcja oddzielona od zera, czyli że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje wartość $\delta_\varepsilon^0 > 0$ taka, że $\delta_\varepsilon(x) \geqslant \delta_\varepsilon^0$ dla wszystkich $x \in [0,1]$.

(b) Podać przykład funkcji ciągłej $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ i $\varepsilon > 0$, dla których funkcja δ_ε nie jest ciągła.

Wskazówka. Poeksperymentować z interaktywnym omówieniem.

Zadanie 4. Czy funkcja $x \ln x$ jest jednostajnie ciągła na $(0,1]$? A na $[1,\infty)$?

Pochodna funkcji

Definicja. Pochodną funkcji $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ w punkcie $x \in (a,b)$ nazwiemy granicę

$$\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

jeśli ona istnieje. Alternatywnie – $f'(x)$ jest jedyną liczbą k spełniającą

$$f(x+h) = f(x) + k\cdot h + r_x(h)\cdot h \quad \text{dla pewnej funkcji } r_x \text{ spełniającej } \lim_{h\to 0} r_x(h) = 0,$$

o ile taka liczba istnieje.

Zadanie 1. Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa wynika, że funkcja

$$f\colon [0,2] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^5 - 10x + 2$$

przyjmuje swoje minimum w pewnym punkcie $x_0 \in [0,2]$, a nawet $x_0 \in (0,2)$. Sprawdzić, że punkt ten spełnia równanie $5x_0^4 - 10 = 0$, a więc $x_0 = \sqrt[4]{2}$.
Wskazówka. Rozważyć znak granic $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0\pm h)-f(x_0)}{h}$.

Zadanie 2. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ograniczoną funkcją ciągłą, a ponadto istnieje skończona pochodna $f'(a)$. Sprawdzić, że funkcja $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R} \setminus \{a\}$.

Zadanie 3. Wykazać, że funkcja g z poprzedniego zadania osiąga na $\mathbb{R}$ swoją wartość maksymalną lub minimalną (być może obie). Podać geometryczną interpretację tych ekstremów.

Podstawowe własności pochodnej. Arytmetyczne własności:

$$(\alpha f)' = \alpha f, \quad (f+g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \quad (1/f)' = -f'/f^2.$$

Funkcja różniczkowalna w danym punkcie jest w tym punkcie ciągła.

Zadanie 4. Niech $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie wielomianem o miejscu zerowym $x_0 \in \mathbb{R}$. Sprawdzić, że $p'(x_0) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy p ma w x_0 podwójne miejsce zerowe (czyli gdy $(x-x_0)^2 | p(x)$).

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli funkcja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w x, a funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w $g(x)$, to złożenie $f \circ g$ jest różniczkowalne w x oraz $(f\circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Wskazówka. Skorzystać z alternatywnej definicji pochodnej.

Zadanie 6. Wyznaczyć pochodne następujących funkcji we wszystkich punktach, w których jest to możliwe:

$$\text{(a) } \sin x \qquad \text{(b) } [x] \qquad \text{(c) } |x| \qquad \text{(d) } \sqrt[3]{x}$$
$$\text{(e) } e^x(a\cos x + b\sin x) \qquad \text{(f) } \sqrt{1-x^2} \qquad \text{(g) } x^n e^{-x^2/2} \qquad \text{(h) } x^x$$

(ostatnie dwa-trzy przykłady mogą wymagać wzoru na pochodną złożenia)

Zadanie 7. O funkcji $y(x)$ wiadomo, że jest określona na pewnym otwartym przedziale i spełnia na nim równanie $x = y(x) + \ln(y(x))$. Wyznaczyć wzór na $y'(x)$.

Uwaga. Jest to przykład *funkcji uwikłanej* (tzn. zadanej przez równanie). Temat ten będzie przedmiotem zainteresowania na Analizie 2.1 (i później).

Zadanie 8. ★ Niech V będzie przestrzenią liniową wszystkich funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ różniczkowalnych nieskończenie wiele razy. Załóżmy, że funkcja liniowa $T\colon V \to \mathbb{R}$ spełnia regułę Leibniza

$$T(fg) = f(0)T(g) + g(0)T(f) \qquad \text{dla } f, g \in V.$$

Wykazać, że istnieje stała $\alpha \in \mathbb{R}$ spełniająca $T(f) = \alpha f'(0)$ dla $f \in V$.

Uwaga. Ten fakt wykorzystuje się do definiowania przestrzeni stycznej w geometrii różniczkowej i algebraicznej.

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej. Jeśli $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna w (a,b), to istnieje punkt $x \in (a,b)$, dla którego

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Wniosek. Załóżmy, że funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie dziedziny. Wówczas

$$\text{funkcja } f \text{ jest niemalejąca} \quad \iff \quad f'(x) \geqslant 0 \text{ dla } x \in (a,b).$$

Podobna charakteryzacja ma miejsce dla funkcji nierosnących.
A dla ściśle monotonicznych?

Wypukłość

Definicja/e. Funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$ jest wypukła, jeśli jej dziedzina jest wypukła (czyli jest odcinkiem) oraz warunek $f(\alpha x + \beta y) \leqslant \alpha f(x) + \beta f(y)$ jest spełniony dla wszystkich $x, y \in D$ i $\alpha, \beta \geqslant 0$ takich, że $\alpha + \beta = 1$.
W szczególnych przypadkach przydatne są równoważne chakteryzacje wypukłości f:

- (gdy f jest ciągła) $f(\frac{x+y}{2}) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$ dla $x, y \in D$;
- (gdy f jest różniczkowalna) f' jest niemalejąca;
- (gdy f jest dwukrotnie różniczkowalna) f'' jest nieujemna.

Zadanie 1. Dla $0 < x \leqslant y$ wyprowadzić nierówności

$$e^y \geqslant e^x + e^x(y-x), \qquad \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x} + \frac{y-x}{2\sqrt{x}}, \qquad \ln y \leqslant \ln x + \frac{y-x}{x}.$$

Wskazówka. Wykres funkcji wypukłej leży nad styczną, a funkcji wklęsłej – pod.

Nierówność Jensena. Jeśli $f\colon D \to \mathbb{R}$ jest wypukła, $x_1, \ldots, x_n \in D$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0$ oraz $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, to

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

Zadanie 2. Z nierówności Jensena (dla funkcji $\ln x$ i x^p) klasyczne nierówności między średnimi dla $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$ oraz $p \geqslant 1$:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \left(\frac{x_1^p + \ldots + x_n^p}{n}\right)^{1/p}$$

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie wartości, jakie może przyjmować wyrażenie

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c}$$

dla dodatnich liczb $a, b, c, d > 0$.

Wskazówka. W przypadku $a+b+c+d=1$ zastosować nierówność Jensena dla funkcji $f(x)=\frac{1}{1-x}$.

Zadanie 4. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{\binom{n}{k}} < \sqrt{n^3 2^{n-1}}.$$

Wskazówka. Nierówność Jensena dla funkcji $\sqrt{x}$.